ВСЕУКРАЇНСЬКА СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

Львів, 15–17 травня 2019 року

I—II курси, 1-ий день

1. Чи існують поліноми $a(x), b(x), c(y), d(y)$ такі, що

$$1 + xy + x^2y^2 \equiv a(x)c(y) + b(x)d(y) \ ?$$

Розв'язок. Ні, таких поліномів нема. Підставляючи послідовно $y = -1; 0; 1$, отримуємо, що поліноми $1 - x + x^2; 1; 1 + x + x^2$ є лінійними комбінаціями двох поліномів $a(x), b(x)$:

$$\begin{cases} 1 - x + x^2 = & c(-1)a(x) + d(-1)b(x), \\ 1 = & c(0)a(x) + d(0)b(x), \\ 1 + x + x^2 = & c(1)a(x) + d(1)b(x). \end{cases}$$

Зауважимо тепер, що $\det \begin{pmatrix} c(-1) & d(-1) \\ c(0) & d(0) \end{pmatrix} \neq 0$, тому для довільного заданого $\alpha_3 \neq 0$ система $\begin{cases} \alpha_1 c(-1) + \alpha_2 c(0) = -\alpha_3 c(1), \\ \alpha_1 d(-1) + \alpha_2 d(0) = -\alpha_3 d(1), \end{cases}$ має єдиний розв'язок α_1, α_2, але тоді $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 \neq 0$ і $\alpha_1(1 - x + x^2) + \alpha_2 + \alpha_3(1 - x + x^2) = (\alpha_1 c(-1) + \alpha_2 c(0) + \alpha_3 c(1))a(x) + (\alpha_1 d(-1) + \alpha_2 d(0) + \alpha_3 d(1))b(x) \equiv 0$. Суперечність з лінійною незалежністю трьох поліномів $1 - x + x^2; 1; 1 + x + x^2$.

2. Нехай S – скінченна множина квадратних матриць розміру $n \times n$, всі елементи яких нулі або одиниці. Через n_i позначимо сумарну (по всіх матрицях з S) кількість одиничок в i-тих рядках всіх матриць. Ми хочему вибрати по одному стовпчику у кожній матриці так, щоб для кожного i сумарна (по всіх вибраних стовпчиках) кількість одиничок в i-тих рядках була принаймні $\lfloor \frac{\alpha n_i}{n} \rfloor$. Чи існує таке додатне число α (незалежне від $|S|$ та n), для якого такий вибір завжди можливий? Якщо так, то яке найбільше можливе значення може мати α?

Розв'язок. Для доведення того, що $\alpha = 0$, розглянемо наступну побудову. Для довільного натурального числа k приймемо $n = 2^k$ і розглянемо матриці $A_1, \ldots, A_k$, де кожна матриця A_j складається з $n/2$ копій стовпчиків $a_j^T = (a_{ij})$, де $a_{ij} = 1$, якщо $\lfloor i/2^{j-1} \rfloor$ непарне і $a_{ij} = 0$, інакше і $n/2$ копій стовпчиків $(1, 1, \ldots, 1)^T - a_j^T$. Тоді $n_i = kn/2$ для кожного i, але для довільного вибору стовпчиків принаймні один рядок не має вибраних одиничок. Отже $0 = \lfloor \alpha n_i / n \rfloor = \lfloor \alpha k/2 \rfloor$. Тобто $\alpha < 2/k$.

3. Нехай $a_n = \prod_{k=1}^{n} (3k + 1)$, $b_n = \prod_{k=1}^{2n} (3k + 2)$. Обчислити:

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \log_{a_n} b_n, \ \underline{\lim_{n \to +\infty}} \log_{a_n} b_n.$$

Розв'язок. Зауважимо, що для $x_n = \ln b_n, y_n = \ln a_n$ маємо

$$\log_{a_n} b_n = \frac{x_n}{y_n}, \quad y_{n+1} > y_n \ (n \geq 1), \ \lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty,$$
$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{\ln(6n+5) + \ln(6n+8)}{\ln(3n+4)} \to 2 \ (n \to +\infty).$$

Тому, за теоремою Штольца $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \log_{a_n} b_n = 2$.

4. Нехай неперервно диференційовні функції $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $\psi\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ такі, що для всіх $x \geq 0$ виконується нерівність $f(x) \leq \int_0^x f(t)dt + \psi(x)$. Довести, що для всіх $x \geq 0$ виконується нерівність $f(x) \leq \psi(x) + e^x \int_0^x \psi(t)e^{-t}dt$.

Розв'язок. Нехай $\psi_0(x) := f(x) - \int_0^x f(t)dt - \psi(x)$, $\psi_1 := \psi_0 + \psi$; тоді, $(\forall x \geq 0)\colon \ \psi_0(x) \leq 0$ і $f(x) = \int_0^x f(t)dt + \psi_1(x)$. Звідси, отримаємо диференційне рівняння $f'(x) = f(x) + \psi_1'(x)$, а також, що $f(0) = \psi_1(0)$. Зауважимо, що $f(x) = ce^x$ – розв'язок відповідного однорідного диф. рівняння $f'(x) = f(x)$. Запишемо, $f(x) = c(x)e^x$. Тоді, $f'(x) = (c(x) + c'(x))e^x$, звідси, $(c(x) + c'(x))e^x = c(x)e^x + \psi_1'(x) \iff c'(x)e^x = \psi_1'(x) \implies$
$c(x) = \int_0^x \psi_1'(t)e^{-t}dt + C_1$. Отже, $f(x) = C_1e^x + e^x \int_0^x \psi_1'(t)e^{-t}dt =$
$C_1e^x + \psi_1(x) - \psi_1(0)e^x + e^x \int_0^x \psi_1(t)e^{-t}dt$, але $f(0) = \psi_1(0)$, тому, $C_1 = \psi_1(0)$ і $f(x) = \psi_1(x) + e^x \int_0^x \psi_1(t)e^{-t}dt$.
Залишається пригадати, що $\psi_1(x) \leq \psi(x)$ $(\forall x \geq 0)$.

5. Чи можна покрити круг радіуса r такою скінченною множиною смужок S_j, $1 \leq j \leq n$, сталої ширини d_j, $1 \leq j \leq n$, і нескінченної довжини, що сума $\sum_{j=1}^n d_j < 2r$?

Розв'язок. Не можна. Справді, маючи задане покриття на площині, перейдемо у простір. Роздуємо круг до кулі того ж радіуса r, а кожній смужчці, яка його покриває, надамо безмежну висоту. Тоді для кожного j смужка ширини d_j буде покривати на сфері, яка обмежує кулю, кульовий пояс ширини $d_j' \leq d_j$, площа поверхні якого $2\pi r d_j' \leq 2\pi r d_j$. Оскільки площа поверхні сфери дорівнює $4\pi r^2$, то $\sum 2\pi r d_j \geq 4\pi r^2$ і сума $\sum_{j=1}^n d_j \geq 2r$.

6. Нехай (d_n) — послідовність чисел з проміжку $(0,1)$

$$\gamma_1 = \varlimsup_{\varepsilon\to 0+} \frac{\sum_{k=1}^\infty d_k^{1+\varepsilon}}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}, \quad \gamma_2 = \varlimsup_{\varepsilon\to 0+} \frac{\sum_{d_k>\varepsilon} d_k}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Довести, що: a) $\gamma_1 \leq \gamma_2$; b) $\gamma_2 \leq e\gamma_1$.

Розв'язок. a) Якщо при деякому $\varepsilon > 0$ ряд $\sum_{d_k>\varepsilon} d_k = +\infty$, то $\gamma_2 = +\infty$ і нерівність тривіальна. У протилежному випадку

розглянемо функцію $m(x) = \sum_{d_k > x} d_k$. З означення γ_2 випливає, що для довільного $\gamma > \gamma_2$ знайдеться $x_0 \in (0,1)$ таке, що $m(x) < \gamma \ln\ln \dfrac{1}{x}$, $0 < x < x_0$. Звідси, записуючи суму у вигляді інтеграла Стілт'єса, інтегруючи частинами та проводячи заміну змінної інтегрування $x = e^{-u/\varepsilon}$, отримуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^{1+\varepsilon} = -\int_0^1 x^{\varepsilon}\, dm(x) = -x^{\varepsilon} m(x)\Big|_{0+}^{1} + \varepsilon \int_0^1 x^{\varepsilon-1} m(x)\, dx \le$$

$$\le \varepsilon\gamma \int_0^1 x^{\varepsilon-1} \ln\ln \frac{1}{x}\, dx + \int_{x_0}^1 x^{\varepsilon-1}\Big(m(x) - \varepsilon\gamma \ln\ln \frac{1}{x}\Big)\, dx =$$

$$= \gamma \int_0^{\infty} e^{-u} \ln \frac{u}{\varepsilon}\, du + \int_{x_0}^1 x^{\varepsilon-1}\Big(m(x) - \varepsilon\gamma \ln\ln \frac{1}{x}\Big)\, dx = \gamma \ln 1/\varepsilon + C_1,$$

де $C_1 = \gamma \int_0^{+\infty} e^{-u} \ln u du + \int_{x_0}^1 x^{\varepsilon-1} m(x) dx + \gamma \int_0^{\varepsilon \ln(1/x_0)} e^{-u} \ln \frac{u}{\varepsilon}\, du$, звідки випливає, що $\gamma_1 \le \gamma$. Залишається спрямувати $\gamma \to \gamma_2 + 0$.

b) Нехай тепер $\gamma > \gamma_1$ і $\varepsilon > 0$ достатньо мале. За означенням γ_1 $\varepsilon \int_0^1 x^{\varepsilon-1} m(x)\, dx \le \gamma \ln \frac{1}{\varepsilon} + C$ для деякого $c > 0$. Оскільки функція $m(x)$ незростаюча, для довільного $0 < a < 1$ отримуємо

$$\varepsilon \int_0^1 x^{\varepsilon-1} m(x)\, dx \ge \varepsilon \int_0^a x^{\varepsilon-1} m(x)\, dx \ge m(a) a^{\varepsilon}.$$

З урахуванням попередньої нерівності, маємо $m(a) \le \gamma a^{-\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon} + c$. Вибираючи $\varepsilon = (\ln \frac{1}{a})^{-1}$, одержимо $m(a) \le \gamma e \ln\ln \frac{1}{a} + c$, звідки випливає, що $\gamma_2 \le e\gamma$. Залишається спрямувати $\gamma \to \gamma_1 + 0$.

© *Львівський національний університет ім. Івана Франка, механіко-математичний факультет*

ВСЕУКРАЇНСЬКА СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

Львів, 15–17 травня 2019 року

III—Y курси, 1-ий день

1. Нехай $*$ – комутативна і асоціативна бінарна операція на множині $\mathcal{S}$ така, що $\forall x, y \in \mathcal{S}\ \exists z \in \mathcal{S}\colon\ x * z = y$. Довести, що якщо $a, b, c \in \mathcal{S}$ такі, що $a * c = b * c$, то $a = b$.

Розв'язок. Запишемо $d := a * c = b * c \in \mathcal{S}$. Для деякого $e \in \mathcal{S}$, $d * e = a$ і, отже, для $f := c * e$ маємо

$$a * f = a * c * e = d * e = a, \quad b * f = b * c * e = d * e = a.$$

Нехай $g \in \mathcal{S}$ таке, що $a * g = b$, тоді,

$$b = a * g = g * a = g * (a * f) = (g * a) * f = b * f = a,$$

що й потрібно було довести.

2. Нехай $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$. Довести, що існують рівномірно розподілені на $[0, 1/2]$ випадкові величини ξ, η такі, що $P\{\omega\colon \xi(\omega) + \eta(\omega) = (x_i + x_{i+1})/2\} = x_{i+1} - x_i$, $0 \le i \le n-1$.

Розв'язок. Нехай $U[a, b]$ позначає рівномірний розподіл на відрізку $[a, b]$. Для кожного i, $0 \le i \le n-1$ виберемо

$$2\eta_i \in U[x_i, x_{i+1}], \quad 2\zeta_i := x_i + x_{i+1} - 2\eta_i.$$

Тоді також $2\zeta_i \in U[x_i, x_{i+1}]$. Нехай випадкові величини υ_i такі, що $\upsilon_i = 1$ з ймовірністю $p_i = x_{i+1} - x_i$ і $\upsilon_i = 0$ з ймовірністю $1 - p_i$, при цьому лише одна з величин $\upsilon_0, \ldots, \upsilon_{n-1}$ відмінна від 0 та $(\upsilon_0, \ldots, \upsilon_{n-1})$ незалежні від $(\eta_0, \ldots, \eta_{n-1})$. Такі величини можна задати на добутку двох ймовірнісних просторів $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i)$, $i \in \{1, 2\}$, при цьому $\upsilon_i(\omega_1, \omega_2)$ залежить лише від ω_2, а $\eta_j(\omega_1, \omega_2)$ залежить лише від ω_1.
Тоді $X = \sum_{i=0}^{n-1} \upsilon_i(\eta_i + \zeta_i)$ задовольняє умову

$$P\{\omega\colon X(\omega) = (x_i + x_{i+1})/2\} = x_{i+1} - x_i.$$

Величини $\xi = \sum_{i=0}^{n-1} \upsilon_i\eta_i$ та $\eta = \sum_{i=0}^{n-1} \upsilon_i\zeta_i$ є шуканими. Справді, за побудовою виконується $P\{\omega\colon \xi + \eta = (x_i + x_{i+1})/2\} = x_{i+1} - x_i$. Крім того, $0 \le 2\xi \le 1$. тобто, 2ξ – розподілене на $[0, 1]$, та для довільної борелевої підмножини B цього відрізка маємо

$$P\{\omega\colon 2\xi \in B\} = \sum_{i=0}^{n-1} P\{\omega\colon 2\xi \in B, \upsilon_i = 1\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} P\{\omega\colon 2\eta_i \in B, \upsilon_i = 1\} = \sum_{i=0}^{n-1} P\{\omega\colon 2\eta_i \in B\} \cdot P\{\omega\colon \upsilon_i = 1\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda(B \cap [x_i, x_{i+1}])}{p_i} \cdot p_i = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(B \cap [x_i, x_{i+1}]) = \lambda(B),$$

де λ – міра Лебега. Тому 2ξ – рівномірно розподілене на $[0,1]$, і відповідно ξ – рівномірно розподілене на $[0,1/2]$. Так само встановлюється, що η теж рівномірно розподілене на $[0,1/2]$.

3. Доведіть, що для довільної підмножини A в сепарабельному банаховому просторі X потужності $|A| < |\mathbb{R}|$ існує лінійний неперервний функціонал $f : X \to \mathbb{R}$ такий, що звуження $f\restriction_A$ є ін'єктивним.

Розв'язок. Скориставшись сепарабельністю X, виберемо послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ лінійних неперервних функціоналів на X таких, що для довільного ненульового елемента $x \in X$ існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що $f_n(x) \neq 0$. Можемо вважати, що $\|f_n\| = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, бо в протилежному випадку поділимо f_n на його норму. Для кожного $t \in \mathbb{I} := (-1,1)$ розглянемо лінійний функціонал $f_t = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot t^n$ на X. Зауважимо, що для кожного ненульового елемента $x \in X$ функція $f_t(x)$ від змінної t є аналітичною на інтервалі $\mathbb{I}$ і відмінною від тотожно сталої. Тому, її множина нулів $Z_x = \{t \in \mathbb{I} : f_t(x) = 0\}$ є щонайбільше зліченною. Оскільки $|A| < \mathfrak{c}$, то існує $t \in \mathbb{I}$ таке, що $t \notin \bigcup\{Z_{x-y} : x, y \in A,\ x \neq y\}$. Тоді функціонал f_t має бажану властивість: $f_t(x) - f_t(y) = f_t(x-y) \neq 0$ для будь-яких різних точок $x, y \in A$.

4. Нехай $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ – дві норми на лінійному просторі X, X_i – лінійний нормований простір X з нормою $\|\cdot\|_i$, при цьому лінійні нормовані простори X_1 та X_2 – ізометрично ізоморфні. Чи норми $\|\cdot\|_1$, і $\|\cdot\|_2$ еквівалентні на X?

Розв'язок. Ні, не завжди. Побудуємо відповідний приклад. Нехай $X = C[-1,1]$, $\|x\|_1 = \max\{|x(t)| : t \in [-1,0]\} + \int_0^1 |x(t)|dt$,

$$\|x\|_2 = \max\{|x(t)| : t \in [0,1]\} + \int_{-1}^{0} |x(t)|dt.$$

Тоді $(Vx)(t) := x(-t)$ $(t \in [-1,1])$, $x \in X_1$, – ізометричний ізоморфізм між X_1 та X_2. Але норми $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ не еквівалентні на X, бо послідовність $x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1,0), \\ t^n, & t \in [0,1] \end{cases}$, збіжна в X_1, але розбіжна в X_2.

5. Нехай μ – невід'ємна обмежена борелева міра на $\mathbb{R}$, тобто, невід'ємна міра, визначена на σ-алгебрі борелевих множин на $\mathbb{R}$ така, що $\mu(\mathbb{R}) < +\infty$. Позначимо

$$a_n(\mu) := n! \int\limits_{t_1<t_2<\cdots<t_n} \dots \int d\mu(t_1)\, d\mu(t_2) \dots d\mu(t_n).$$

Обчислити границю $a(\mu) := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(a_n(\mu)\right)^{1/n}$ у випадках: a) міра μ є абсолютно неперервною відносно міри Лебега; b) міра μ є дискретною.

Розв'язок. Позначимо через μ_n борелеву міру на $\mathbb{R}^n$, що задана формулою

$$\mu_n(A) := \int_A d\mu(t_1)\, d\mu(t_2) \dots d\mu(t_n), \quad A - \text{борелева}.$$

Очевидно, що вона невід'ємна обмежена і $\mu_n(\mathbb{R}^n) = \mu(\mathbb{R})^n$.
Нехай Π_n - група підстановок множини $\{1, \dots, n\}$ і
$A_\pi := \{(t_1, \dots, t_n) \mid t_{\pi(1)} < \dots < t_{\pi(n)}\}$. Всі множини A_π є відкриті і попарно не перетинаються. Крім того, $\mu_n(A_\pi) = \mu(A)$ для всіх $\pi \in \Pi_n$, де $A := \{(t_1, \dots, t_n) \mid t_1 < \dots < t_n\}$.
Оскільки $\bigcup\limits_{\pi\in\Pi_n} A_\pi \subset \mathbb{R}^n$, то

$$a_n(\mu) = n!\mu_n(A) \le \mu_n\Big(\bigcup_{\pi\in\Pi_n} A_\pi\Big) \le \mu(\mathbb{R})^n.$$

А, отже, в загальному випадку $a_n(\mu) \le [\mu(\mathbb{R})]^n$, тобто $a(\mu) \le \mu(\mathbb{R})$.

Якщо міра μ є абсолютно неперервна відносно міри Лебега в $\mathbb{R}$, то міра μ_n є абсолютно неперервна відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$. Тому множина $\Omega_n := \mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{\pi\in\Pi_n} A_\pi$ має нульову μ_n-міру. Отже,

$\mu_n\Big(\bigcup\limits_{\pi\in\Pi_n} A_\pi\Big) = \mu(\mathbb{R})^n$, тобто, $(a_n(\mu))^{1/n} = \mu(\mathbb{R})$ і $a(\mu) = \mu(\mathbb{R})$.

Припустимо, що $\mu = \mu_1 + \mu_2$, де μ_1, μ_2 - невід'ємні обмежені борелеві міри на $\mathbb{R}$, причому μ_2 є зосереджена в одній точці. Тоді,

$$\int_{t_1<t_2<\dots<t_n} \dots \int d\mu(t_1) \dots d\mu(t_n) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \int_{t_1<t_2<\dots<t_n} \dots \int d\mu_1(t_1) \dots d\mu_1(t_{m-1})\, d\mu_2(t_m) d\mu_1(t_{m+1}) \dots d\mu_1(t_n).$$

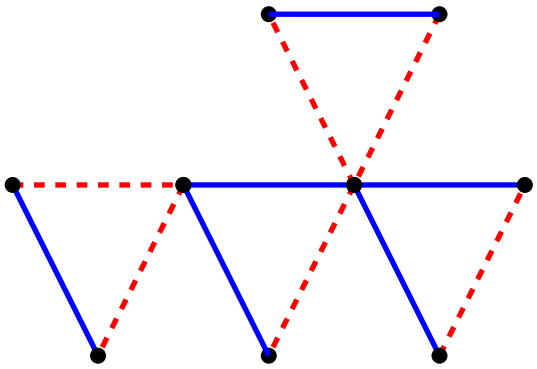
Тому, $a_n(\mu) \le n\mu_2(\mathbb{R})\, a_{n-1}(\mu_1)$. Звідки випливає, що $a(\mu) \le a(\mu_1)$.
А, отже у випадку дискретної міри $a(\mu) = 0$.

6. Ребра скінченного зв'язного графа пофарбовані в два кольори, причому кожна вершина має однакову кількість ребер кожного кольору. Також відомо, що граф має вершину степеня 6. Чи завжди в графі існує цикл, кольори ребер якого чергуються, у випадку:
а) якщо цикл може проходити через деякі вершини двічі?
б) якщо цикл не може проходити через деякі вершини двічі?

Розв'язок. а) На основі властивостей заданого графа ми можемо стартувати в його вершині v степеня шість і йти вздовж ребер, в кожній вершині повертаючи на ще не пройдене ребро, зафарбоване у колір відмінний від кольору щойно пройденого ребра, до того часу, поки ми не повеременось до вершини v. Позначимо щойно пройдений цикл через C_1 і видалимо з графа всі його ребра. Знову стартуємо у вершині v і підемо по ребрах, що

зкалишилися у відповідності до попередніх правил, доки знову не повернемось до вершини v. Позначимо щойно пройдений цикл через C_2 та видалимо його ребра з графа. Повторимо описаний щойно процес ще раз, отримавши цикл C_3. Побудова циклів C_i забезпечує, що кожна відмінна від v вершина C_i належить до двох різнокольорових ребер циклу C_i. Якщо тепер у кожному циклі C_i вершина v належить до двох однокольорових ребер циклу, то у графі їй належить парна кількість ребер кожного кольору, що неможливо, бо ця кількість дорівнює трьом. Отже, існує цикл C_i кожна вершина якого належить до двох різнокольорових ребер циклу.

б) Не обов'язково.



© *Львівський національний університет ім. Івана Франка, механіко-математичний факультет*

ВСЕУКРАЇНСЬКА СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

Львів, 15–17 травня 2019 року

I—II курси, 2-ий день

1. Нехай матриці A, B розміру $n \times n$ такі, що $AB + A + B = 0$. Довести, що $AB = BA$.

Розв'язок. Зауважимо, що $(A+I)(B+I) = AB+A+B+I = I$, звідки, $A + I$, $B + I$ взаємно обернені матриці. Тоді,

$$AB+A+B+I = (A+I)(B+I) = (B+I)(A+I) = BA+A+B+I,$$

тому, $AB = BA$.

2. У деякій країні між кожною парою міст прокладена дорога, але з одностороннім рухом. Чи існує місто, у яке можна потрапити з будь-якого іншого міста проїхавши не більше ніж дві дороги?

Розв'язок. Переконаємось, що місто v з найбільшою кількістю доріг, що ведуть до нього, є шуканим. Справді, нехай u – довільне місто, дорога $\{u, v\}$ з якого не веде в v. Тоді дорога $\{u, v\}$ веде з v в u. Але, з максимальності v випливає, що існує місто w, з якого дорога $\{w, v\}$ веде в v, проте дорога $\{w, u\}$ не веде в u. Тоді, дорога $\{w, u\}$ веде в w. Отже, з u можна потрапити у v, рухаючись спочатку дорогою $\{w, u\}$, а потім – дорогою $\{w, v\}$.

3. Нескінченна група G називається *електорально гнучкою* якщо для довільного розбиття $G = P \cup Z$ множини G на дві нескінченні підмножини існують нескінченна множина $I \subset Z$ і елементи $x, y \in G$ такі, що $xIy \subset P$. У протилежному випадку група G називається *електорально стабільною*. Наприклад, розбиття $\mathbb{Z} = P \cup Z$ циклічної групи $\mathbb{Z}$ на множини $P = \{n \in \mathbb{Z} : n > 0\}$ і $Z = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq 0\}$ вказує на електоральну стабільність $\mathbb{Z}$.
Чи є електорально стабільною адитивна група $\mathbb{R}$ дійсних чисел?

Розв'язок. Для розбиття $\mathbb{R} = A \cup B$ на дві нескінченні множини, розглянемо множини $J_+ = \{a \in A : a + 1 \in B\}$ і $J_- = \{a \in A : a - 1 \in B\}$. Якщо J_+ або J_- є нескінченною, то все доведено. Тому припустимо, що $J = J_+ \cup J_-$ є скінченною.

Якщо множини $A \setminus (J + \mathbb{Z})$ і $B \setminus (J + \mathbb{Z})$ не порожні, то зафіксуємо точки $a \in A \setminus (J + \mathbb{Z})$ і $b \in B \setminus (J + \mathbb{Z})$ та зауважимо, що для нескінченної множини $I = a + \mathbb{Z} \subset A$ і точки $x = b - a$ виконується $x + I = b - a + a + \mathbb{Z} = b + \mathbb{Z} \subset B$.

Припустимо тепер, що одна з множин $A \setminus (J+\mathbb{Z})$ чи $B \setminus (J+\mathbb{Z})$ є порожньою. Якщо $A \setminus (J + \mathbb{Z})$ – порожня, то $A \subset J + \mathbb{Z}$ і за принципом Діріхле для деякого $a \in A$ множина $I = A \cap (a+\mathbb{Z})$ є нескінченною. Виберемо довільний елемент $b \in G \setminus (J + \mathbb{Z}) \subset B$ і зауважимо, що $(b - a) + I \subset b + \mathbb{Z} \subset B$.

Якщо $B \setminus (J + \mathbb{Z})$ є порожня, то $B \subset J + \mathbb{Z}$ і для деякого $b \in B$ множина $B \cap (b + \mathbb{Z})$ є нескінченною. Виберемо довільний

елемент $a \in G \setminus (J+\mathbb{Z}) \subset A$ і зауважимо, що множина $I = a-b+(B\cap(b+\mathbb{Z})) \subset a+A \subset A$ нескінченна та $b-a+I \subset B$.

4. Нехай $a<b$, а дві безмежно диференційовні функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $\forall x\in[a,b]: g(x)=f(x)$. Чи випливає звідси, що $\forall x\notin[a,b]: f(x)=g(x)$?

Відповідь. Ні, не обов'язково. **Розв'язок.** Задамо дві дійсні функції f та g так: $f(x)=\begin{cases}\exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) & \text{якщо } x>b\\ 0 & \text{якщо } x\in[a,b] \text{ та}\\ \exp\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) & \text{якщо } x<a\end{cases}$ $g(x)\equiv 0$. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що $\forall x\in[a,b]: g(x)=f(x)$, але $f(x)\neq g(x)$ $\forall x\notin[a,b]$.

5. Чи існують інтегровні за Ріманом на $[0,1]$ такі функції $y=f(u)\colon[0,1]\to[0,1]$, $u=g(x)\colon[0,1]\to[0,1]$, що функція $y=f(g(x))$ не інтегровна за Ріманом на $[0,1]$.

Відповідь. Так існують. **Розв'язок.** Нехай $f(u)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1,\\ 0, & u=0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{m}{n}, m\in\mathbb{Z}_+, n\in\mathbb{N},\\ 0, & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$ Тоді, f – інтегровна, g – неперервна на $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ і, отже, також інтегровна на $[0,1]$. Але,

$$f(g(x))=\begin{cases}f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}, & x=\frac{m}{n}, m\in\mathbb{Z}_+, n\in\mathbb{N},\\ f(0), & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q},\\ 0, & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$$

тобто, є не інтегровною на $[0,1]$.

6. Нехай для послідовностей $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ і $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ невід'ємних чисел для всіх $n\ge 1$ виконуються нерівності $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \le 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \le 1$. Довести, що $(\forall n\ge 1)$: $\left|\prod\limits_{k=1}^{n}(1-a_k)-\prod\limits_{k=1}^{n}(1-b_k)\right| \le \sum\limits_{k=1}^{n}|a_k-b_k|$.

Розв'язок. Зафіксуємо $n\in\mathbb{N}$ і розглянемо функцію $F(t):=\prod\limits_{j=1}^{n}(1-a_j(1-t)-b_jt)$, $t\in[0,1]$. Очевидно, що $F'(t)=\sum\limits_{j=1}^{n}(a_j-b_j)F_j(t)$, де $F_j(t):=\prod\limits_{1\le k\le n, k\neq j}(1-a_k(1-t)-b_kt)$. З умов задачі випливає, що $a_k,b_k\in[0,1]$, а також, що $0\le 1-a_k(1-t)-b_kt\le 1$ $(t\in[0,1],\ k\in\mathbb{N})$. Звідси, $|F_j(t)|\le 1$ $(\forall t\in[0,1])$. Тому, $\max\limits_{t\in[0,1]}|F'(t)|\le\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j-b_j|$. За теоремою Лагранжа про скінченні прирости тепер маємо

$$\left|\prod_{j=1}^{n}(1-b_j)-\prod_{j=1}^{n}(1-a_j)\right| = |F(1)-F(0)| \le \max_{t\in[0,1]}|F'(t)| \le \sum_{j=1}^{n}|a_j-b_j|.$$

ВСЕУКРАЇНСЬКА СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

Львів, 15–17 травня 2019 року

III—Y курси, 2-ий день

1. Нехай G — скінченна група. Довести, що кількість елементів $a \in G$, які задовольняють умову $a^3 = e$, є непарним числом, де e – нейтральний елемент.

Розв'язок. Для кожного $a \in G$, $a \neq e$ такого, що $a^3 = e$ маємо $(a^2)^3 = (a^3)^2 = e^2 = e$. Отже, a і a^2 – елементи порядку 3 і $a \neq a^2 = a^{-1}$. Звідси випливає, що для нетривіального елемента a порядку 3 існує інший елемент a^2 порядку 3. Отже множина нетривіальних елементів порядку 3 є пари $(x, x^2), (y, y^2), \ldots$. Нейтральний елемент також задовольняє умову $e^3 = e$. Тому цих елементів є непарна кількість.

2. Нехай $f(z)$ — ціла функція, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, а $g(z)$ – довільна аналітична в околі точки $z = \infty$ вітка $G(z) = Ln\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$. Довести, що

$$\int_a^b f(z)\,dz = -\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)g(z).$$

Розв'язок. Зазначимо, що лишок у нескінченно віддаленій точці можна записати так

$$\operatorname*{res}_{z=\infty}(f(z)g(z)) = \operatorname*{res}_{z=0}\Big(-\frac{1}{z^2}f(1/z)g(1/z)\Big), \quad g(1/z) = \ln\left(\frac{1-az}{1-bz}\right).$$

Для цілої функції f запишемо її розвинення у степеневий ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)z^n}{n!}$. Запишемо розвинення у степеневий ряд в околі точки $z = 0$

$$-\frac{1}{z^2}f\left(1/z\right)g\left(1/z\right) = -\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(0)}{m!\,z^m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n z^{n-2} - a^n z^{n-2}}{n} =$$

$$= -\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}\frac{b^{n+1}z^{n-m-1} - a^{n+1}z^{n-m-1}}{n+1}.$$

Лишок функції $-\frac{1}{z^2}f\left(1/z\right)g\left(1/z\right)$ в точці $z = 0$ дорівнює коефіцієнтові при z^{-1}, який виникає при $n = m$. Звідси,

$$\operatorname*{res}_{z=\infty}(f(z)g(z))) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right) = -\int_a^b f(z)\,dz.$$

3. Нехай $(P_j)_{j=1}^{\infty}$ - послідовність ортопроекторів у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Довести, що якщо $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\|\sum_{j=1}^{n} P_j\right\| = 1$, то ряд $\sum_{j=1}^{\infty} P_j$ збігається в сильній операторній топології до ортопроектора.

Розв'язок. Покладемо $G_n := \sum_{j=1}^{n} P_j,\ n \in \mathbb{H}$. Нехай $f \in H$. Оскільки P_j є ортопроектором, то $(P_j f \mid f)_H = \|P_j f\|^2,\ j \in \mathbb{H}$. Тому з умови задачі випливає, що для довільних $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|P_j f\|^2 = \lim_{n\to\infty}(G_n f \mid f)_H \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \|G_n\|\|f\|^2 \le \|f\|^2,$$

тобто, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|P_j f\|^2 \le \|f\|^2,\ f \in H$. Тоді для довільного $k \in \mathbb{H}$

$\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|P_j P_k f\|^2 \le \|P_k f\|^2,\ f \in H$, а, отже, $\sum\limits_{j\ne k} \|P_j P_k f\|^2 \le 0,\ f \in H$.

А це означає, що $P_j P_k = 0,\ j \ne k$, тобто, ортопроектори P_j є попарно ортогональними. Звідси випливає, що кожен оператор G_n також є ортопроектором і $\|(G_n - G_m)f\|^2 = |\|G_n f\|^2 - \|G_m f\|^2| \to 0$, при $n, m \to \infty$. Тому, послідовність ортопроекторів G_n збігається в сильній операторній топології до оператора G. Легко переконатися, що G є ортопроектором.

4. Нехай (ξ_n) — послідовність нормально розподілених комплекснозначних випадкових величин, тобто таких, що їхня щільність $p_{\xi_n}(x,y) = \dfrac{1}{\pi} e^{-(x^2+y^2)},\quad z = x + iy \in \mathbb{C}$. Доведіть, що майже напевно існує $n_0(\omega)$ таке, що для всіх $n \ge n_0(\omega)$ виконуються нерівності $|\xi_n(\omega)| \le 2\ln n,\quad |\arg \xi_n(\omega)| > n^{-2}$, де $argz \in [-\pi, \pi)$ – однозначна вітка $Argz$.

Розв'язок. Нехай $z = x + iy$. Зауважимо, що випадкові величини $\arg \xi_n$ рівномірно розподілені на $[-\pi, \pi)$. Справді, для $-\pi \le \alpha \le argz < \beta < \pi$

$$P\{\omega\colon \arg \xi_n(\omega) \in (\alpha, \beta)\} = \frac{1}{\pi} \int\int_{\alpha \le argz < \beta} e^{-(x^2+y^2)} dxdy =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{0}^{+\infty} r e^{-r^2} d\varphi dr = \frac{\beta - \alpha}{2\pi}.$$

Оскільки, для математичного сподівання в.в. $e^{|\xi_n|}$

$$\mathbf{E} e^{|\xi_n|} = \frac{1}{\pi} \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)} dxdy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{+\infty} r e^{r - r^2} d\varphi dr < +\infty,$$

то за нерівністю Маркова для подій $A_n := \{\omega\colon\ |\xi_n(\omega)| \ge 2\ln n\}$ і $B_n := \{\omega\colon\ |\arg \xi_n(\omega)| \le n^{-2}\}$ маємо

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathbb{P}\{\omega\colon\ |\xi_n(\omega)| \ge 2\ln n\} \le$$

$$\le \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathbb{P}\{\omega\colon\ e^{|\xi_n(\omega)|} \ge n^2\} \le \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{\mathbf{E} e^{|\xi_n(\omega)|}}{n^2} < +\infty,$$

а також, що

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}\mathbb{P}(B_n)=\sum_{n=n_0}^{+\infty}\mathbb{P}\{\omega\colon\ |\arg\xi_n(\omega)|\le n^{-2}\}=\sum_{n=n_0}^{+\infty}\frac{1}{\pi n^2}<+\infty.$$

Залишається використати першу частину леми Бореля-Кантеллі для послідовностей подій A_n і B_n.

5. Нехай f — така ціла функція, що функція $g(z)=f(z)f(1/z)$ обмежена на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Довести, що $f(z)=cz^m$ при деяких $m\in\mathbb{Z}_+$, $c\in\mathbb{C}$.

Розв'язок. Припустимо, що $f(z)=c_1z^mf_1(z)$, $c_1\neq 0$, $f_1(0)=1$, $m\in\mathbb{Z}_+$. Тоді, $f_1(z)f_1(1/z)=c_1^{-2}f(z)f(\frac{1}{z})$ –обмежена, тобто, для всіх $r>0$ і z_0 таких, що $|z_0|=r$, $|f_1(z_0)|=\max\limits_{|z|=r}|f_1(z)|$, за нерівністю Коші $\left(\max\limits_{|z|=r}|f_1(z)|\ge|a_n|r^n,\ \forall n\ge 0\ \text{де}f_1(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n\right)$

$$C\ge\max\{|f_1(z)f_1(1/z)|\colon|z|=r\}\ge|f_1(1/z_0)||a_n|r^n,$$

звідки, при $r\to+\infty$ отримуємо, що $|f_1(0)|\cdot|a_n|\varlimsup\limits_{r\to+\infty}r^n\le C$. Тому, $a_n=0$ $(n\ge 1)$, звідси, f_1 – тотожно стала.

6. Нехай $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - числова послідовність така, що

$$0<x_{n+1}<x_n<1\ (\forall n\ge 1),\quad \inf_{n\ge1}\prod_{k=1}^{n}(1+(-1)^kx_k)>0.$$

Довести, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2<\infty$.

Розв'язок. Нехай $\alpha:=\inf\limits_n\prod\limits_{k=1}^{n}(1+(-1)^kx_k)$. За умовою $\alpha>0$. Крім того, з умов задачі випливає, що для довільних $k\in\mathbb{N}$

$$(1-x_{2k-1})(1+x_{2k})=1-(x_{2k-1}-x_{2k})-x_{2k-1}x_{2k}\le 1-x_{2k-1}x_{2k}\le 1-x_{2k}^2.$$

Використаємо нерівність $1-t\le e^{-t},\ t\ge 0$, яку нескладно отримуємо з того, що $y=1-t$ – дотична до графіка опуклої функції $y=e^{-t}$ в точці $t=0$. Зі сказаного отримуємо, що

$$(1-x_{2k-1})(1+x_{2k})\le 1-x_{2k}^2\le e^{-x_{2k}^2}.$$

Тому, $0<\alpha\le\prod\limits_{k=1}^{2n}(1+(-1)^kx_k)\le\exp\left\{-\sum\limits_{k=1}^{n}x_{2k}^2\right\}$, тобто, $\sum\limits_{k=1}^{n}x_{2k}^2\le\ln\alpha^{-1},\ n\in\mathbb{N}$. А, отже, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k^2\le x_1^2+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_{2k}^2\le x_1^2+2\ln\alpha^{-1}<\infty$.

© *Львівський національний університет ім. Івана Франка, механіко-математичний факультет*