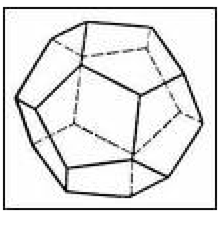
Гіпотеза Пуанкаре

Багато людей, навіть дуже далеких від математики, чули слова «гіпотеза Пуанкаре», та, очевидно, не всі вони в змозі сказати, що ці слова означають. Оригінальне формулювання гіпотези звучить так:

«Кожен компактний однозв'язний тривимірний многовид без краю гомеоморфний тривимірній сфері».

Для студента-математика всі терміни тут, сподіваюся, зрозумілі; для нефахівців потрібні деякі пояснення. Почнемо з терміну «гомеоморфний»: дві геометричні фігури (більш загально, топологічні простори) називають *гомеоморфними*, якщо одну з них можна неперервно продеформувати в іншу. *Многовид* — це багатовимірний аналог поверхні; локально він влаштований як евклідовий простір відповідного виміру. Тривимірну сферу одержуємо, якщо звиклий тривимірний евклідовий простір доповнимо однією, нескінченно віддаленою, точкою. *Компактність* означає, що кожна послідовність у просторі містить збіжну підпослідовність. *Однозв'язність* — що кожну замкнену криву у просторі можна неперервно у цьому просторі продеформувати в точку. (Автор цих рядків усвідомлює, що за такі означення можна одержати «2» на іспиті у Т.О. Банаха чи І.Й. Гурана, та тут просто нема місця на детальніші пояснення. Вивчайте топологію!)
Отож, суть гіпотези Пуанкаре полягає в тому, що дається невеликий список умов, які характеризують тривимірну сферу з точністю до гомеоморфізму. Гіпотезу сформулював у 1904 році видатний французький математик Анрі Пуанкаре (1854—1912) — один з творців топології, до якої, власне, гіпотеза і належить.

Спочатку Пуанкаре сформулював дещо слабші умови, які, як він вважав, характеризують тривимірну сферу, та пізніше побудував контрприклад до цієї слабшої гіпотези. Контрприклад відомий під назвою «гомологічна сфера». Для її побудови візьміть додекаедр (разом з внутрішністю) і ототожніть у ньому протилежні грані (звичайно, повертаючи при цьому на кут $\pi/10$ у належному напрямку).



Утворена гомологічна тривимірна сфера є лише на перший погляд абстрактним математичним об'єктом. Сучасні космологічні теорії стверджують обмеженість нашого Всесвіту, деякі з них наводять достатньо агрументів на користь гомеоморфності Всесвіту і гомологічної сфери.

Гіпотезу Пуанкаре намагалися довести відомі математики. Один з них, Генрі Вайтгед (племінник видатного британського математика, логіка і філософа Вайтгеда), запропонував у 1934 році доведення, яке ж сам незабаром і спростував. Втім, помилка привела його до цікавого контрприкладу, який називається тепер «многовидом Вайтгеда»: це стягуваний тривимірний многовид, не гомеоморфний тривимірному евклідовому просторові.
Кілька невдалих спроб довести гіпотезу Пуанкаре зробив американський тополог Ар.Ейч. Бінґ. Більше десяти років безуспішно займався цією проблемою Крістос Папакіріякопулос (Παπακυριακόπουλος*)*. Цей список можна продовжувати.
Аналог гіпотези Пуанкаре існує в кожному вимірі. Для виміру 1 він тривіальний: кожен зв'язний компактний одновимірний многовид гомеоморфний колові, тобто одновимірній сфері. Для виміру 2 відповідна гіпотеза випливає з теореми про класифікацію компактних поверхонь. Для вимірів >4 її майже одночасно, протягом 60-70-х років минулого століття, довели Стівен Смейл та Столінґз (вимір >6; на виміри 4 і 5 це доведення поширив Зіман). Чотиривимірний випадок виявився складнішим — його доведення одержав М. Фрідман у 1982 році.
У тому ж 1982 році Вільям Терстон запропонував гіпотезу геометризації (**Thurston's geometrization conjecture).** Вона стверджує, що кожен тривимірний многовид можна розкласти на підмноговиди, що мають геометричну структуру. З гіпотези Терстона випливає, зокрема, гіпотеза Пуанкаре.
Один з часткових випадків гіпотези геометризації, з якого випливає гіпотеза Пуанкаре, довів у 2002 році видатний російський математик Григорій Перельман (наголос на «а»).

Перельман народився в 1966 році і в кінці 80-х років поїхав до США, де побував на лекції Гамільтона, присвяченій потокам Річчі — системам диференціальних рівнянь в частинних похідних, нелінійним аналогам рівняння теплопровідності на многовидах.

Нагадаємо деякі означення з курсу диференціальної геометрії. Якщо $g_{\alpha\beta}$ - ріманова метрика (перша квадратична форма), то $g^{\alpha\beta}$ означає обернену метрику. Символи Крістофеля (коефіцієнти зв'язності) задаються формулою

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\partial_{\beta} g_{\gamma\delta} + \partial_{\gamma} g_{\beta\delta} - \partial_{\delta} g_{\beta\gamma} \right).$$

Тоді тензор кривини Рімана задається формулою

$$Riem^{\delta}_{\alpha\beta\gamma} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} - \partial_{\beta}\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}\Gamma^{\delta}_{\alpha\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma},$$

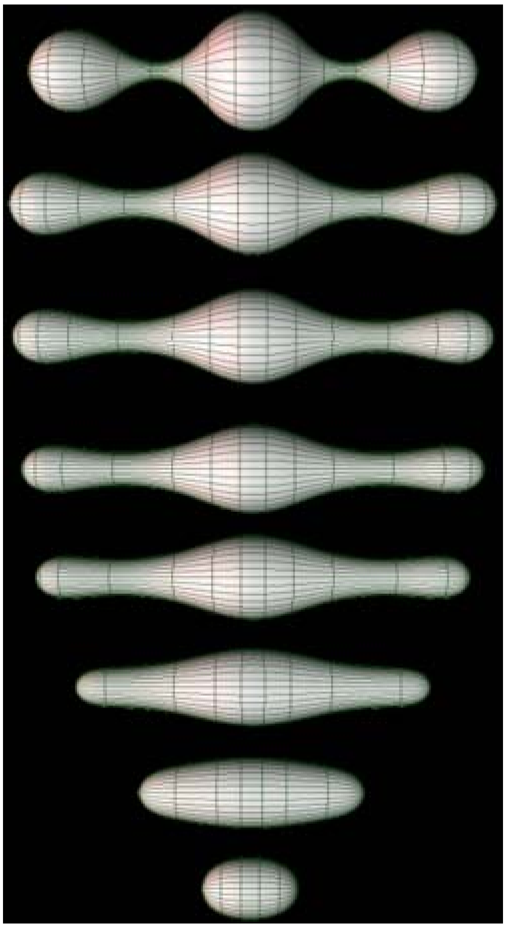
звідки вже одержуємо тензор Річчі як згортку:

$$Ric_{\alpha\gamma} = Riem^{\beta}_{\alpha\beta\gamma}.$$

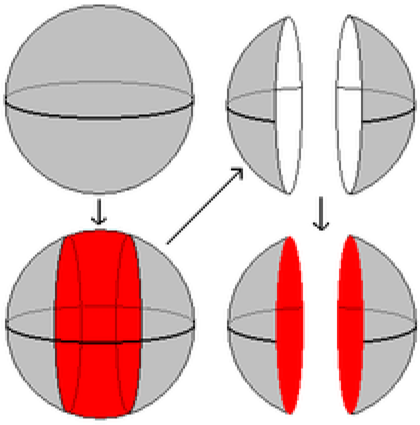
Якщо g_t — ріманова метрика на компактному многовиді без краю, залежна від дійсного параметра t і Ric_g — її тензор Річчі, то рівняння потоку Річчі має вигляд:

$$\partial_t g_t = -2Ric_{g_t}.$$

Воно описує деформацію ріманової метрики на многовиді. Різні стадії деформації метрики для випадку двовимірного многовида (поверхні) зображено на рисунку:



Потоки Річчі дозволяють деформувати ріманову метрику на многовиді, проте в процесі деформації виникають особливості — точки, у яких кривина прямує до нескінченності. При підході до такої особливості проводять так звану «хірургію» (на рисунку нижче — двовимірний випадок: перехід від одного етапу процесу до іншого позначено стрілками).



Отож процес доведення, якщо про нього говорити дуже спрощено, полягає у застосування до однозв'язного тривимірного многовида «потоку Річчі з хірургіями».

Доведення гіпотези Пункаре Перельман не опублікував у науковому часописі, а помістив на відомому сервері препринтів arXiv:

http://arxiv.org/abs/math.DG/0211159
http://arxiv.org/abs/math.DG/0303109
http://arxiv.org/abs/math.DG/0307245

Математики негайно взялася за перевірку цих результатів. Принаймні три незалежні групи експертів розвинули доведення і запевнили математичну громадськість, що воно коректне.
Відомий «Science Magazine» 22 грудня 2006 року назвав доведення гіпотези Пуанкаре науковим «проривом року». Це вперше таке визнання одержав математичний результат.

Широкій публіці гіпотеза Пуанкаре і прізвище Перельмана стали відомі в основному через відмову останнього прийняти у 2006 році медаль Філдса — найвищу нагороду для математиків - так би мовити, математичний аналог Нобелівської премії, а також у зв'язку з мільйоном доларів, що його пропонує Математичний інститут Клея за розв'язання семи проблем тисячоліття, до яких і належала гіпотеза Пуанкаре — дотепер незрозуміло, чи прийме Перельман цю нагороду.

Отож, бачимо, що зусиллями кількох поколінь математиків, що завершилися видатною працею Григорія Перельмана, знайдено відповідь на одне з найбільш інтригуючих запитань, сформульованих понад століття тому.

М. Зарічний