Тори і фрактали

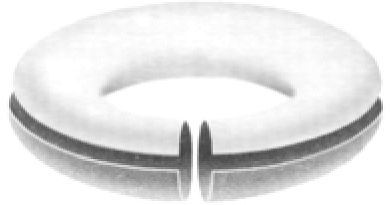
Далеко не кожен день у стрічці новин трапляються повідомлення про математичні відкриття. Нещодавно у інтернетрях помістили інформацію про опубліковану в *Proceedings of the National Academy of Sciences* статтю групи французьких математиків та інформатиків, що містила зображення так званого плоского тора.

Спочатку пояснимо, що ж таке плоский тор. Візьмімо звичайний квадратний листок паперу, але не для того, щоби робити з нього орігамі. Спробуємо склеїти у цьому листку (розміщеному так, щоби боки були паралельні координатним осям) правий і лівий боки, так, щоби в результаті вийшов циліндр. При бажанні цей циліндр можна зробити гладким.

(Зразу ж треба завважити, що слово «гладкість» тут вжите у побутовому сенсі; математично це означає існування в кожній точці дотичної площини, тобто C^1-диференційовність.)

Можна було би склеїти у квадрата верхній і нижній бік – теж нескладно добитись, щоби вийшов гладкий циліндр.

Виникає природне запитання: а чи можна приклеїти одночасно правий бік до лівого, а верхній – до нижнього? Якщо би матеріал був еластичний, то вийшов би тор.



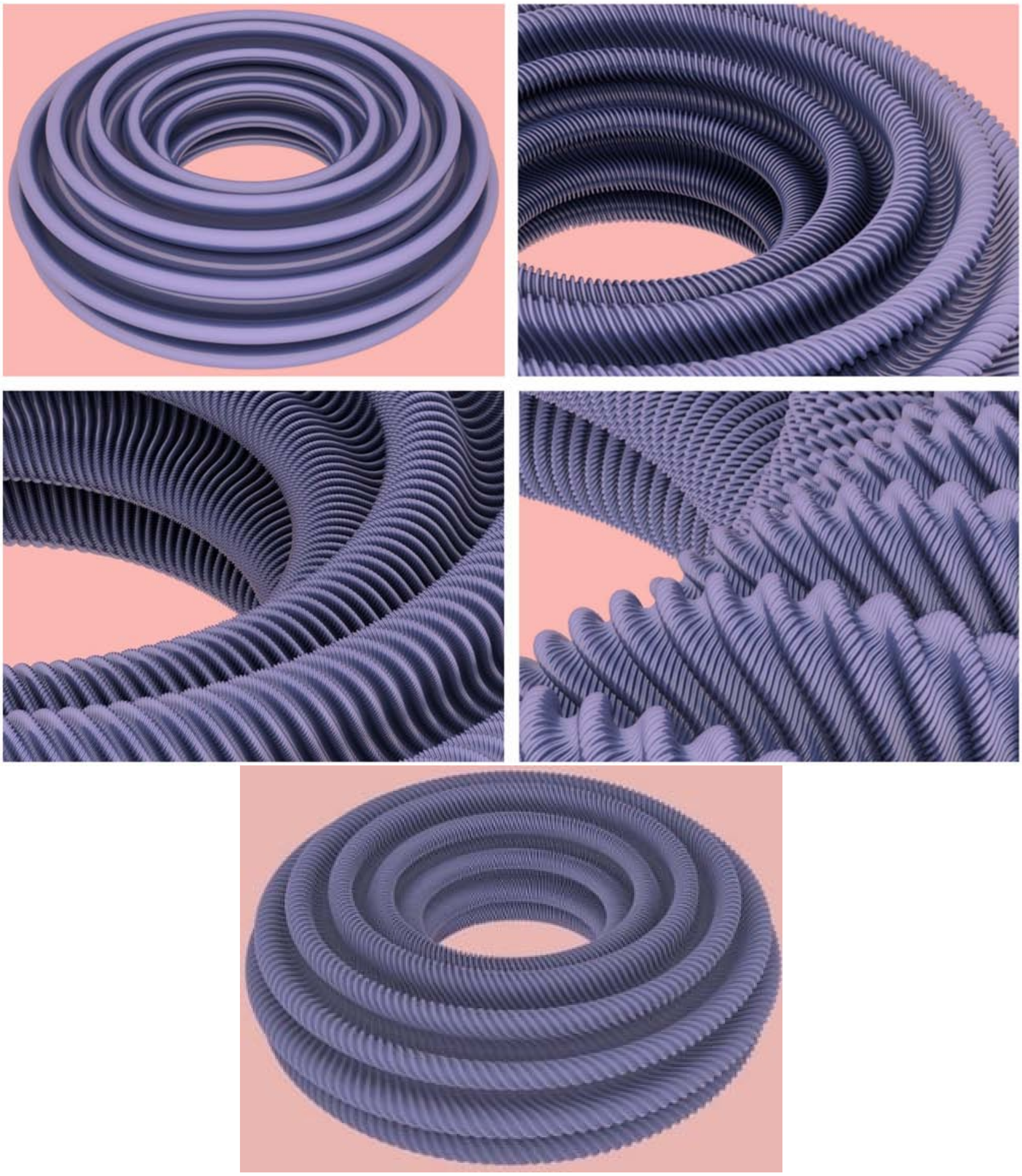
Зауважмо, що папір – це такий матеріал, що легко згинається, проте не розтягується і не стискується. Якщо хтось має вільний вечір, то може поекспериментувати з аркушем паперу і ножицями. Не впевнений, що вдасться провести склеювання навіть ціною зіжмакування паперу. Про те, щоби результат утворився гладким, навіть мови нема.

Однак, як показує отриманий понад 50 років тому результат Н. Кейпера та Дж. Неша, склеювання з гладким результатом зробити можна. Теорема Кейпера-Неша – це теорема існування, її доведення не містить ні методу побудови, ні візуалізації отриманого об'єкта.

(Дж. Неш, як відомо, здобув Нобелівську премію з економіки; про нього знято фільм «Ігри розуму» з Раселом Кроу в головній ролі. Видатні математичні результати Неша, що за складністю на порядок перевищують його внесок у теорію ігор, значно менше відомі широкому загалові.)

Метод, що дозволив перетворити доведення існування у конструктивне доведення, це опукле інтегрування, яке придумав у 70-х роках минулого століття один з найвидатніших геометрів сучасності – французький математик російського походження Міша Громов (Misha Gromov – саме так він підписує свої публікації). Цей метод для розв'язування рівнянь у частинних похідних дав змогу одержувати розв'язки рівнянь з мінімальною гладкістю (тобто C^k-розв'язки для рівнянь k-го порядку) недовизначених систем нелінійних рівнянь. Крім математичних застосувань, метод опуклого інтегрування виявився корисним також і у матеріалознавстві.

Отож у статті отримано візуалізацію процесу склеювання. Окремі її етапи видно з рисунків.



Ці рисунки ~~передерто~~ скопійовано зі статті Vincent Borrelli, Said Jabrane, Francis Lazarus, Boris Thibert “Flat tori in three-dimensional space and convex integration”
http://www.pnas.org/content/early/2012/04/18/1118478109.full.pdf+html
про яку йшла мова на самому початку.

Хоча дотична площина до отриманого тора, а топологічно це тор, існує всюди, нормальний вектор не залежить неперервно від точки. Він демонструє поведінку, яку з різних причин варто назвати фрактальною. Сам об'єкт при цьому є C^1-фракталом, тобто він є одночасно гладким і самоподібним. Теорія C^1-фракталів знаходиться in statu nascendi і обіцяє нам нові відкриття, які можуть революціонізувати застосування математики.

Варто зважити, що у згаданій статті запропоновано алгоритм побудови зображення плоского тора. Одержана тривимірна модель складалася з близько двох мільярдів вузлів. Бачимо, що командні зусилля теоретиків та прикладників привели до цікавого і багатообіцяючого результату.